数理解析研究所講究録
111 巻 1971 年 57-64

Invariant Rational Functions

京大 数研 宮田 武彦

kを体，$F = k(x_1, \cdots, x_n)$をk上のn変数の有理函数体（以下"有理体"と呼ぶ）とする。このとき$GL_n(k)$は，vector space $V = kx_1 + \cdots + kx_n$に自然に作用し，Fのk-自己同型をひき起す。部分群$G \subseteq GL_n(k)$に関して，G不変な元全体はFの部分体である。これをF^Gと書く。

問題：どのようなk, Gに関してF^Gがまたk上有理体となるか？

R. G. Swan はGが cyclic group であってもF^Gが有理体でない例があることを示した（[1]）。またF^Gが有理体となるk, Gの pairs は Masuda 氏等により与えられた（[2], [3]）。

以下で述べることは Swan, Masuda の方法を適用的に一般化しようと試みた結果の報告である。

今後簡単のため $k=\mathbb{Q}$ の場合を考えよう（§3を除く）.

1°. Masuda の加群

G を finite abelian group とする。m を G の exponent, ζ_m を1の m 乗根とし $\pi = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ とする。$G \subset GL_n(\mathbb{Q})$, $F = \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$, G は $GL_n(\mathbb{Q})$ を通して $V = \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_n$, 従って F に $\mathbb{Q}$-同型に作用しているとする。$k = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ とおき $F_0 = Fk$ とする。G は F_0 に $\mathbb{Q}$-同型（又は k-同型）に作用する。G と π は元ごとに可換である。$V_0 = Vk = kx_1 + \cdots + kx_n$ は G 加群として完全に分解する。$V_0 = ky_1 \oplus \cdots \oplus ky_n$ と分解したとすると，Hilbert の定理90により π は集合 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ にの permutation をひきおこすように $y_1, \cdots, y_n$ を選ぶことができる。F_0 の乗法群の部分群で $y_1, \cdots, y_n$ で生成されたものを H とする。$H \cong \mathbb{Z}^n$ で H は自然に π 加群になる。H の元で G 不変なもの全体 M は H の π 部分加群になる。この M を F に関する Masuda の加群と呼ぶことにする。

一般に N を $\mathbb{Z}$-rank が n である $\mathbb{Z}$-free, π-module とする。$N = \mathbb{Z}g_1 + \cdots + \mathbb{Z}g_n$ とおく。$\pi = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$, $K = k(x_1, \cdots, x_n)$ とする。π を N を通して次のように K に $\mathbb{Q}$-同型として作用させることができる：

$g \in \pi$, $g(a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n) = b_1 g_1 + \cdots + b_n g_n$ とするとき

$$g(\alpha x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) = \alpha^g x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \qquad \alpha \in k$$

πのこの作用をkに制限するとでとのガロア群の作用と一致する。このとき $K = k(N^\times)$ と書くことにする。ガロア群の基本定理から

補題 Mを Masuda の加群とすると

$1°$. $[H : M] = \#(G)$

$2°$ $F^G = (F_0{}^\pi)^G = (F^G)^\pi \cong k(M^\times)^\pi$.

F^G が $\mathbb{Q}$ 上有理的かどうかを判定するのには $2°$ が基本的である。

G の $V = \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_n$ 上の表現が $V = V_1 \oplus V_2$ と分解し，G が V_1 上に faithful に作用しているとする。V_2 の basis を $x_1, \cdots, x_l$ とすると $\mathbb{Q}(V) = \mathbb{Q}(V_1)(x_1, \cdots, x_n)$ Hilbert の定理 90 によれば $y_1, \cdots, y_l$ を $x_1, \cdots, x_l$ の $\mathbb{Q}(V_1)$ 係数の一次式として適当に選べば，y_i は G 不変でかつ $\mathbb{Q}(V) = \mathbb{Q}(V_1)(y_1, \cdots, y_l)$ となるように選べる。$\mathbb{Q}(V_1)$ から作った Masuda の加群も簡単のため $\mathbb{Q}(V)$ の Masuda の加群と呼ぶことにする。

πを有限群, π-加群が induced modules の直和に同型なとき permutation module と呼ぶ。またガロア群の基本定理, または Hilbert の定理90 により

定理 (Masuda) Masuda の加群が permutation ならば $\mathbb{Q}(V)^G$ は有理体である。

Masuda の加群の例

G を $\#(G)=n$ の abel 群とし $V=\mathbb{Q}x_1+\cdots+\mathbb{Q}x_n$ を G の regular representation とする。$\pi=Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$

(A) $n=p^l$, $p>2$ の場合

$\mathbb{Z}\pi$ の ideal M_n で $p^{l-1}(p-1)$, $t-a$ で生成されたもの。(t は G の生成元, a は mod p^l での原始根)

(B) $n=2^l$, $l>3$

$$\pi\cong\left(\mathbb{Z}/(2^{l-2})\right)^{*}\oplus(\pm1)=\langle t\rangle\oplus\langle s\rangle$$

とする。M_n は π の ideal で, 2^l, $t-5$, $s+1$ で生成されたもの。

(C) $n = 2, 2^{\alpha}$ のときは (A) と同じに作れる。

(D) $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ のとき M_n は

$$M_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus M_{p_m^{\alpha_m}}$$

と同型に選べる。

(A), (C) の場合は M_n は projective。(B) の場合は決して projective ではない。(D) の場合は一般には判らない。(A) の場合でしかも $l=1$ なら、$p \leqq 11$ なら M_n は free であることが証明されている (Maeda [3])。$p=13$ なら free でない ([4])。

2° Swan の定理

π を有限群, M を $\mathbb{Z}$-free f.g. π-module とする。S, S' が permutation modules で

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow S' \longrightarrow 0$$

が exact のとき M を q-p-module (quasi-permutation module) と呼ぶことにする。

定理 (Swan L. 1) K/k は finite galois extension $\pi = gal(K/k)$, M を $\mathbb{Z}$-free π-module で f-g なものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) 適当な不定元 $y_1, \cdots, y_r$ を取ると

$K(M^{\times})^{\pi}(y_1,\cdots,y_t)$ は k 上有理体である．

(2) M は g-p-module

$3°$ の例 M_n を考える． 例 A の M_{p^l} は projective module になることが簡単に云える． B. の M_{2l} は projective ではない，すると g-p-module でもないことが判る． また M_p $p \le 11$ なら free (Masuda [3]) $p=13$ なら free でない (宮田 [4])

$k' = \mathbb{Q}(\zeta_{p^{l-1}(p-1)})$ に $g\alpha = \zeta\alpha$ で π の作用を入れる (g は π の生成元)． 準同型

$$M \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$$

が決まる． M の image は ideal $\mathfrak{a} = (p^l, \zeta - a)$ である． $p=47$ のとき $\mathfrak{a}$ は単項でない 従って $\mathbb{Q}(V)^{G}$ は有理函数体ではない (Swan [3])． $p=17, 19, \cdots$ $l=1$ 等は $\mathfrak{a}$ が単項になっている． これらの場合はすべて $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ の class number が 1 の場合だけのようである．

$3°$ 応用

π を finite cyclic group とする．

$g\text{-pic}(\mathbb{Z}\pi) = \{[I] \mid I : g\text{-}p\text{-module かつ projective}\}$

とおくと g-pic$(\mathbb{Z}\pi)$ は pic$(\mathbb{Z}\pi)$ の subgroup である。$\mathbb{Q}\pi$ の $\mathbb{Z}\pi$ を含む maximal order を $\mathcal{O}$ とする。
$[I] \longrightarrow [I \otimes_{\mathbb{Z}\pi} \mathcal{O}]$ で homomorphism

$$\mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathrm{pic}(\mathcal{O})$$

が決まり

定理1 $0 \rightarrow g\text{-}\mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathrm{pic}(\mathcal{O}) \rightarrow 0$

は exact。

注

$[I] \in g\text{-}\mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi)$ のとき $k(I^{\times})^{\pi}$ が有理体かどうかは判らない。

定理2. G を位数 p^{l} の cyclic group, g を生成元とする。$K = k'(x_1, \cdots, x_{p^l})$ に $gx_1 = x_2, \cdots, gx_n = x_1$ で G が作用しているとする。

$p > 2$ のとき $k \ni \zeta_p$ なら K^G は k' 上有理体。

$p = 2$ のとき $k \ni \sqrt{-1}$ なら K^G は k' 上有理体。

$p = 2,\ l \geq 3,\ k' = \mathbb{Q}$ なら K^G は決して有理体ではない。

S.

G を finite group, $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G] \to I \to 0$ なる exact sequence を考える。

定理3. 次のことは同値である。

(i) $H^2(G, \mathbb{Z})$ は order が $n(G)$ に等しい元をもたない。

(ii) G は cyclic.

(iii) I は $\mathfrak{g}$-p-module である。

References

[1] R. G. Swan; Invariant rational functions ---
Inventiones Math., 7 (1969), 148 – 158

[2] K. Masuda: On a problem of Chevalley,
Nagoya Math. J, 8 (1955), 59 – 63

[3] K. Masuda: Application of the theory of the groups of classes of projective modules ----
J. of. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 223 ~ 232

[4] 宮田; 不変式. 代数シンポジューム報告集, 1969, 18 – 42.